差分方程式の有理形解について(函数方程式とその応用)

柳原, 二郎

数理解析研究所講究録
499巻 1983年 33-48

差分方程式の有理形解について

千葉大理 柳原二郎 (Niro Yanagihara)

§1．序論

非線形差分方程式

(1.1) $\quad \alpha_n w(z+n)+\alpha_{n-1}w(z+n-1)+\cdots+\alpha_1 w(z+1)=R(w(z))$

を考える．ここで $R(w)=P(w)/Q(w)$ は有理関数で，$\deg[P]=p$，$\deg[Q]=q$ とする．(1.1) で $n=1$ のときは $w(z+1)=R(w(z))$ となる．しかし $n>1$ ならば (1.1) は iteration との関係も失われるから果してどのような意味があるか，むしろ一般な非線形を扱った方が良いではないか，という意見もあろう．筆者もその点，あまり自信はないが，しかし (1.1) は非線形としては最も簡単な形だと思われるので，これについて調べておいて一般の非線形への足掛りとすることもそう無意味でもあるまいと思われる。$q_0=\max(p,q)$．

(I) $q=0$，$p=1$ なら (1.1) は極をもつ有理形解をもち得る．しかし $q=0$，$p\geqq 2$ なら (1.1) の解は entire．[9]

(Ⅱ)　$p \geqq q+1$　なら (1.1) の解は超越的．　[9]

(Ⅲ)　$p \geqq q+2$　なら (1.1) の解は位数 ∞．　[9]

(Ⅳ)　$q_0 = \max(p, q) \geqq n+1$　なら (1.1) の解は超越的でかつ位数 ∞．[9]

(Ⅴ)　p, q を $p = q+1$ でかつ $q_0 \leqq n$ なように任意に与えると，位数有限な超越解をもつ (1.1) の形の方程式が存在する．[10]

(Ⅵ)　p, q を $p \leqq q \leqq n$ なように任意に与えると，有理関数解をもつ (1.1) の形の方程式が存在する．[10]

このようなことから，p と q の関係が (1.1) の解の性質に対して大きな意味をもつことがわかる．(Ⅴ)，(Ⅵ) で存在を主張している方程式はごく少いだろうと予想される．[10]

Harris-Sibuya [2]，[4] は一般の非線形方程式 $\vec{w}(z+1) = \vec{F}(z, \vec{w}(z))$ について，ある角領域で漸近展開 $\vec{w}(z) \sim \sum \vec{a}_m / z^m$ をもつ解の存在を証明している．これを (1.1) に適用すれば解の存在はいえるが，$\vec{a}_m = \vec{0}$ となり定数解の存在を言っていることになる．しかし (Ⅰ)―(Ⅵ) は定数でない解についての命題だから，(1.1) が定数でない解をもつかどうか，が問題となろう．

それを考えるために

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{C} \;;\; (\alpha_n + \cdots + \alpha_1)\lambda = R(\lambda)\}$$

とおく．Λは空かも知れない．たとえば $R(w) = (\alpha_n + \cdots + \alpha_1)w + 1/Q(w)$ を考えてみよ．しかし $p \geqq q+2$ ならたしかにΛは空ではない．$\lambda \in \Lambda$ に対し，特性方程式

$$(1.2) \qquad f_\lambda(t) = \alpha_n t^n + \cdots + \alpha_1 t - R'(\lambda) = 0$$

を考え，その根を $\tau_1(\lambda), \cdots, \tau_n(\lambda)$ とかこう．このとき

<u>補題</u> 1.1．$p \geqq q+2$ とする．ある $\lambda \in \Lambda$ と，ある j $(1 \leqq j \leqq n)$ とがあって，$\tau_j(\lambda) = 1$ となるかまたは $|\tau_j(\lambda)| > 1$ となる．

この補題から，(1.1) が non-trivial な解をもつことがいえる．すなわち，$\tau_j(\lambda) = 1$ な λ と j とがあれば，ある角領域で

$$(1.3) \qquad \begin{aligned} w(z) &\sim \lambda + \sum_{k=1}^{\infty} p_k(z)\left(\frac{\log z}{z}\right)^k \\ p_k(z) &\sim \sum_{j=1}^{\infty} c_{kj}\, z^{-\frac{j}{m}} \end{aligned}$$

をみたす解が存在する．ここで m は方程式 (1.1) によってきまる正整数で，c_{kj} は c_{0m} をきめれば一意的に定まる．

$|\tau_j(\lambda)| > 1$ な λ と j とがあれば，もし $\tau_j(\lambda)^k$ がどんな $k > 1$ に対しても (1.2) の根とならないなら，ある半平面で

$$(1.4) \qquad w(z) = \lambda + \sum_{l=1}^{\infty} p_l\, \tau_j(\lambda)^{lz}$$

と展開される解が存在する．係数 p_l は p_1 を任意に定めれば

一意にきまる. $\tau_j(\lambda)^*$ がある k に対して(1.2)の根となるときも, (1.4)はもう少し複雑にはなるが, 解は存在する.

(1.3)あるいは(1.4)のような展開をもたない解はどうなるだろうか. これを考えるために

$$H^*(\alpha, \beta, K) = \{ z = x + iy \ ; \ \alpha < y < \beta, \quad x \leqq K \}$$

とおく. このとき

<u>定理</u> 1.2. $p \geqq q+2$ とする. $w(z)$ を(1.1)の有理形解とする. 定数 L ((1.1)によってきまる)があって, つぎのことが成り立つ: α, β を任意に与えるとある K が定まり

$$z \in H^*(\alpha, \beta, K) \quad \text{のとき} \quad |w(z)| \leqq L .$$

この定理から容易に, $\{ w(z-\mu) \ ; \ \mu \geqq 0 \}$ が正規族をなし

$$(1.5) \qquad w(z-\mu) \longrightarrow \lambda \in \Lambda \qquad (\mu \to \infty)$$

が広義一様に成り立つ, ことが示される. さらに, もし

$$(1.6) \qquad |\tau_1(\lambda)| > |\tau_2(\lambda)| > \cdots > |\tau_n(\lambda)| > 0$$

ならば

$$(1.7) \qquad [w(z+1-\mu) - \lambda] / [w(z-\mu) - \lambda] \longrightarrow \tau_j(\lambda)$$

が, ある $j \ (1 \leqq j \leqq n)$ について成り立つことが示される. このことから, 解はほぼ(1.3)または(1.4)の形になることが推測されるであろう. このように, 解の形をきめて行くためには, (1.5)が成り立つかどうかを知ることが大切である.

しかし補題1.1および(1.5)に対し，条件 $p \geqq q+2$ は落せない．たとえば

$$(1.8) \qquad w(z+2)+w(z+1)=w(z)+\frac{1}{w(z)}$$

を考えれば，$\Lambda=\{1,-1\}$ で，(1.2) は $t^2+t=0$ となり根は 0 と -1 とで，補題1.1は成り立たない．また解 $w(z)=(e^{\pi i z}+e^{-\pi i z})/(e^{\pi i z}-e^{-\pi i z})$ をもち，これは (1.5) をみたさない．

そうではあるが，$p \leqq q+1$ でも，$q_0 \geqq n+1$ なら (1.5) と類似のことがいえるのではないか？ ここではとくに $p=q+1 \geqq n+1$ の場合を考えよう．議論の基礎をなすのは，半帯状領域における Nevanlinna 理論である．

2. 半帯状領域における Nevanlinna 理論

正数 $A>0$ と，実数 $a, a'\ (a<a')$ に対し

$$(2.1) \qquad H=H(A,a,a')=\{z=x+iy\,;\ -A<y<A,\ a<x<a'\}$$

とおく．sn は，基本周期 $4K$，$2iK'$ $(K>0,\ K'>0)$ をもつ Jacobi 楕円関数とする．よく知られているように，$\mathrm{sn}(iz-ia)$ は，$H(K,a,a+K')$ を上半平面に写像する。

$$(2.2) \qquad v(z)=v(z\,;A,a,a',c)= \\ =\log\left|\frac{\mathrm{sn}(iz-ia)+\mathrm{sn}(ic-ia)}{\mathrm{sn}(iz-ia)-\mathrm{sn}(ic-ia)}\right|$$

とおく．ここで c は実数で，$a<c<a'=a+K'$ とし，

また $A=K$ とする。$v(z)$ は $H(A,a,a')$ のグリーン関数でその極は $z=c$ にある。

$f(z)$ は $\overline{H(A,a,\infty)}$ で有理形な関数とする.

$$(2.3)\begin{cases} m(A,a,a',c;\infty,f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\partial H}\dfrac{\partial v}{\partial n}\log\dfrac{\sqrt{1+|f(z)|^2}}{\sqrt{1+|f(c)|^2}}\,ds_z \\ N(A,a,a',c;\infty,f)=\sum v(z_n) \end{cases}$$

とおく. ここで和は, $f(z)$ の, $H(A,a,a')$ に含まれる極 $\{z_n\}$ についてとる. また $f(c)\neq\infty$ としてある. もし c が $f(z)$ の $\varkappa$ 位の極であれば, (2.3) の代りに

$$(2.3')\begin{cases} m(A,a,a',c;\infty,f)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\partial H}\dfrac{\partial v}{\partial n}\log\dfrac{\sqrt{1+|f(z)|^2}}{|c_\varkappa|}\,ds_z, \\ N(A,a,a',c;\infty,f)=\sum v(z_n)+\varkappa V_0 \end{cases}$$

とおく. ここで $c_\varkappa=\lim\limits_{z\to c}\left[(z-c)^\varkappa f(z)\right]$, $V_0=\lim\limits_{z\to c}\left[v(z)-\log\dfrac{1}{|z-c|}\right]$. 和は $f(z)$ の, $H(A,a,a')$ に含まれる c 以外の極 $\{z_n\}$ についてとる. さらに

$$(2.4)\qquad T(A,a,a',c;f)=\frac{1}{\pi}\iint_H v(z)\left(\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2}\right)^2 d\sigma_z$$

とおく. また任意の複素数 b に対し

$$m(A,a,a',c;b,f)=m\left(A,a,a',c;\infty\ \frac{1+\bar{b}f}{f-b}\right),$$

$$N(A,a,a',c;b,f)=N\left(A,a,a',c;\infty\ \frac{1+\bar{b}f}{f-b}\right)$$

とする. $v(z)$ と, $u(z)=\log\sqrt{1+|f(z)|^2}$ に Stokes の

公式を適用すると，半帯状領域での第一基本定理を得る：

定理 2.1. 任意の b $(|b| \leqq \infty)$ に対し

$$m(A,a,a',c;b,f)+N(A,a,a',c;b,f)=T(A,a,a',c;f).$$

つぎの定理がわれわれには有用である．

定理 2.2. $R(w)=P(w)/Q(w)$ は次数 g_0 の有理関数とする．$f(z)$ が $\overline{H(A,a,\infty)}$ で有理形な関数とすると

$$(2.5)\quad T(A,a,a',c;R(f))=g_0 T(A,a,a',c;f)+O(1).$$

ここで $O(1)$ は，c を固定したとき，$f(c)$ によってきまり A, a, a' によらずに有界であることを意味する．

注意．定理 2.1 により，$p>g$ としておいてよい．

定理 2.2 の証明．Γ は有限個の閉円板の和集合で，$P(w)$ の零点はすべて含み，$Q(w)$ の零点を含まないものとする．するとて定数 M_1, M_2 があって

$$(2.6)\quad \frac{M_1}{|P(w)|} \leqq \frac{1}{|R(w)|} \leqq \frac{M_2}{|P(w)|} \qquad (w \in \Gamma)$$

となる．また Γ の外部では $\frac{1}{R(w)}$ も $\frac{1}{|P(w)|}$ も有界：

$$(2.6')\quad \frac{1}{|R(w)|} \leqq L, \quad \frac{1}{|P(w)|} \leqq L \qquad (w \notin \Gamma)$$

（L はある定数）．

$$E_1=\{z;\ z\in \partial H(A,a,a'),\ f(z)\in\Gamma\},$$

$$E_2=\{z;\ z\in \partial H(A,a,a'),\ f(z)\notin\Gamma\}$$

とする．このとき

$$\left|\int_{E_2}\frac{\partial v}{\partial n}\log\frac{\sqrt{1+\left|\frac{1}{R(f(z))}\right|^2}}{\sqrt{1+\left|\frac{1}{R(f(c))}\right|^2}}\,ds_z\right| \leqq 2\pi\max\left(\log\sqrt{1+L^2},\ \log\sqrt{1+\frac{1}{|R(f(c))|^2}}\right)$$

であるから

$$(2.7)\quad m\left(A,a,a',c;\infty,\frac{1}{R(f)}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}+\frac{1}{2\pi}\int_{E_2}=\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}+O(1)$$

で，$O(1)$ は A, a, a' によらずに抑えられる．同様に

$$\left|\int_{E_2}\frac{\partial v}{\partial n}\log\frac{\sqrt{1+\left|\frac{1}{P(f(z))}\right|^2}}{\sqrt{1+\left|\frac{1}{P(f(c))}\right|^2}}\,ds_z\right| \leqq 2\pi\max\left(\log\sqrt{1+L^2},\ \log\sqrt{1+\left|\frac{1}{P(f(c))}\right|^2}\right)$$

であるから

$$(2.7')\quad m\left(A,a,a',c;\infty,\frac{1}{P(f)}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{E_1}+O(1).$$

(2.6), (2.7), (2.7′) から

$$m\left(A,a,a',c;\infty,\frac{1}{R(f)}\right)=m\left(A,a,a',c;\infty,\frac{1}{P(f)}\right)+O(1).$$

一方，明らかに $N\left(A,a,a',c;\infty\,\frac{1}{R(f)}\right)=N\left(A,a,a',c;\infty,\frac{1}{P(f)}\right)$

だから，

$$(2.8)\quad T\left(A,a,a',c;\frac{1}{R(f)}\right)=T\left(A,a,a',c;\frac{1}{P(f)}\right)+O(1)=T(A,a,a',c;P(f))+O(1).$$

$P(w)=a_p w^p+\cdots$ とする．C^* は

$$|w|\geqq C^* \text{ のとき } \quad 2|a_p w^p|\geqq|P(w)|\geqq\frac{1}{2}|a_p w^p|$$

が成り立つような定数とする．これを使って

$$E_1^*=\{z;\ z\in\partial H(A,a,a'),\ |f(z)|>C^*\},$$

$$E_2^*=\{z;\ z\in\partial H(A,a,a'),\ |f(z)|\leqq C^*\}$$

とおくと，上と同様にして

$$(2.9)\quad \begin{aligned} m(A,a,a',c;\infty,P(f))&=\frac{1}{2\pi}\int_{E_1^*}\frac{\partial v}{\partial n}\log\frac{\sqrt{1+|P(f(z))|^2}}{\sqrt{1+|P(f(c))|^2}}\,ds_z+\frac{1}{2\pi}\int_{E_2^*}\\ &=\frac{1}{2\pi}\int_{E_1^*}+O(1)=q_0\,m(A,a,a',c;\infty,f)+O(1)\end{aligned}$$

$(q_0=p)$ となる．また明らかに

$$N(A,a,a',c;\infty,P(f))=q_0 N(A,a,a',c;\infty,f)$$

であるから，結局

$$T(A,a,a',c;R(f))=q_0 T(A,a,a',c;f)+O(1)$$

で，(2.8)，(2.9) の $O(1)$ は A,a,a' によらずに抑えられるから定理を得る．　　　　Q.E.D.

<u>定理 2.3</u>． $f_1(z)$, $f_2(z)$ が $\overline{H(A,a,\infty)}$ で有理形ならば

(2.10)　$T(A,a,a',c;f_1+f_2)\leqq T(A,a,a',c;f_1)+T(A,a,a',c;f_2)+O(1)$

(2.11)　$T(A,a,a',c;f_1f_2)\leqq T(A,a,a',c;f_1)+T(A,a,a',c;f_2)+O(1)$.

ここで $O(1)$ は，c を固定したとき $f_1(c)$, $f_2(c)$ できまり，A,a,a' によらない．

<u>定理 2.4</u>．　$A\leqq A_1$，　$a\geqq a_1$，　$a'\leqq a_1'$　ならば

$$T(A,a,a',c;f)\leqq T(A_1,a_1,a_1',c;f).$$

3．補助定理

$w(z)$ は (1.1) の有理形解とする．ただし $p=q+1\geqq n+1$．

定数 K に対し

(3.1)　$L(y_0,K)=\{z=x+iy_0\ ;\ x\leqq K\}$

(3.2)　$\begin{cases}\Delta=\{y_0\ ;\ w(z)\text{ が任意の }K\text{ に対し }L(y_0,K)\text{ 上に極をもつ}\}\\ H^*(\alpha,\beta,K)=\{z=x+iy\ ;\ \alpha<y<\beta,\ x\leqq K\}\end{cases}$

補題 3.1. $y_0 \in \Delta$ とする。α, β $(\alpha < y_0 < \beta)$ と K とあって $w(z)$ は $H^*(\alpha, y_0, K) \cup H^*(y_0, \beta, K)$ で正則となる。

証明. $w(z)$ の極 $\{z_m\}$, $z_m = x_m + iy_m$, $y_m \to y_0$, $x_m \to -\infty$, があったとする。各 m に対し整数 $j_1, \cdots, j_{k_m}$ $(1 \leqq j_l \leqq n)$ があって、$-n \leqq x_m + j_1 + \cdots + j_{k_m} \leqq 0$ で、$z_m' = z_m + j_1 + \cdots + j_{k_m}$ が $w(z)$ の極となる。$z_m' = x_m' + iy_m$ とおくと、極 $\{z_m'\}$ がある点 $z_0 = x_0 + iy_0$, $-n \leqq x_0 \leqq 0$, に集積することとなり、矛盾. Q.E.D.

補題 3.2. $R(w) = P(w)/Q(w)$ は (1.2) の有理関数で、$p = q+1$ とし、w_1 は $Q(w)$ の零点とする。$y_0 \in \Delta$ とし、α, β, K は補題 3.1 のものとする。$K' < K$ あって、$w(z)$ は w_1 を $H^*(\alpha, y_0, K') \cup H^*(y_0, \beta, K')$ においてとらない。

証明. $w(z_m) = w_1$ となる点列 $\{z_m\}$, $z_m = x_m + iy_m$ で $y_m \to y_0$, $x_m \to -\infty$ なものがあったとすると、各 m に対し整数 $j^{(m)}$, $1 \leqq j^{(m)} \leqq n$ あって、$z_m^* = z_m + j^{(m)}$ が $w(z)$ の極となる。これは補題 3.1 と矛盾する。 Q.E.D.

補題 3.2. $y_0 \in \Delta$ とすると、ある K と、極 $z_1, \cdots, z_k$, $z_j = x_j + iy_0$, $K-n \leqq x_j \leqq K$ $(j=1, \cdots, k)$ とあって、つぎの性質をもつ：z_0 が $L(y_0, K)$ 上の極ならば、ある j $(1 \leqq j \leqq k)$ があって、$z_j - z_0$ は整数で、$\mathrm{ord}(z_j) = \mathrm{ord}(z_0)$.

補題3.4. w_1 は $Q(w)$ の零点とする。$y_0 \in \Delta$ とすると、ある K' と、w_1-点 $z_1', \cdots, z_{k'}'$, $z_j' = x_j' + iy_0$, $K'-n \leqq x_j' \leqq K'$, があって、つぎの性質をもつ：$z_0' \in L(y_0, K')$ が $w(z_0') = w_1$ ならば、ある j $(1 \leqq j \leqq k')$ あって $z_j' - z_0'$ が整数となる。

（補題3.3, 3.4 の証明は容易だから省略する。）

4. 第2基本定理と、予備的不等式

有理形関数 $f(z)$ に対して

$$S(A, a, a'; f) = \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A} dy \int_{a}^{a'} \left[\frac{|f'(\xi+iy)|}{1+|f(\xi+iy)|^2}\right]^2 d\xi$$

とおく。$S(A, a, a'; f)$ は、$f(z)$ による $H(A, a, a')$ の像の球面積である。b_1, b_2, b_3 相異なる3つの値とすると、[8, P.100, Lemma 2] によって

$$(4.1) \qquad S(A, a, a'; f) \leqq 3\sum_{j=1}^{3} n(a'+2+A; b_j, f) + O(a').$$

ここで $n(t; b_j, f)$ は $f(z) - b_j$ の、$H(A, a, t)$ に含まれる零点の個数である。ただし、重複度は考えない。

$\frac{\partial v}{\partial x}(z; A, a, a', c)$ は、$\mathrm{Re}\, z \geqq c+1$ では、$a' \to \infty$ のとき、有界である。それゆえ

$$T(A, a, a', c; f) = \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A} dy \int_{a}^{a'} v(x+iy)\left[\frac{|f'(x+iy)|}{1+|f(x+iy)|^2}\right]^2 dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A} dy \int_{a}^{a'} \left[\frac{\partial v}{\partial x}(x+iy)\int_{a}^{x}\left(\frac{|f'(\xi+iy)|}{1+|f(\xi+iy)|^2}\right)^2 d\xi\right] dx \leqq$$

$$\leqq K\int_{a}^{a'} S(A, a, x; f)\, dx + O(1)$$

がある定数 $K>0$ について成り立つ．よって(4.1)から

(4.2) $$T(A,a,a',c;f)\leqq 3K\sum_{j=1}^{3}\int_a^{a'} n(x+2+A;b_j,f)\,dx+O(a'^2)$$

これが，半帯状領域の<u>第２基本定理</u>である．

一方，任意の $\varepsilon>0$ に対し，$A,-a,a'$ が十分大のとき

(4.3) $$v(z;A,a,a',c+1)\leqq(1+\varepsilon)\,v(z;A,a,a',c)$$

が，$x=\mathrm{Re}\,z$ が十分大のときに成り立つ．

$w(z)$ は (1.1) の有理形解とする．定理2.2と2.3から

$$\begin{aligned}
&T(A,a,a',c;R(w(z)))=g_0\,T(A,a,a',c;w(z))+O(1)\\
&=T(A,a,a',c;\alpha_n w(z+n)+\cdots+\alpha_1 w(z+1))\leqq\\
&\leqq\sum_{k=1}^{n}T(A,a,a',c;w(z+k))+O(1)=\\
&=\sum_{k=1}^{n}T(A,a+k,a'+k,c+k;w(z))+O(1)\leqq\\
&\leqq n(1+\varepsilon)\,T(A,a,a'+n,c;w(z))+O(1)\ .
\end{aligned}$$

よって

(4.4) $$g_0\,T(A,a,a',c;w(z))\leqq n(1+\varepsilon)\,T(A,a,a'+n,c;w(z))+O(1)$$

$a'\to\infty$ のとき $T(A,a,a',c;w(z))\to\infty$ ならば，(4.4)から

$$g_0\,T(A,a,a',c;w(z))\leqq n(1+2\varepsilon)\,T(A,a,a'+n,c;w(z)).$$

いま，$g_0\geqq n+1$ とする．$\varepsilon>0$ を小さくとって，$g_1=\dfrac{g_0}{n(1+2\varepsilon)}>1$ となるようにすると

$$T(A,a,a'+n,c;w(z))\geqq g_1\,T(A,a,a',c;w(z)),$$

$$T(A,a,a'+mn,c;w(z))\geqq g_1^{\,m}\,T(A,a,a',c;w(z)).$$

それゆえ

(4.5) $\quad T(A, a, a', c\ ; w(z)) \geqq M\, q_2^{\,a'} \qquad (a' \to \infty)$

が，ある $M>0$ に対して成り立つ．ここで $q_2 = q_1^{\frac{1}{n}} > 1$．

5．定理と，その証明．

以上の準備の上で，つぎの定理を証明する．

定理．(1.1) において $p = q+1 \geqq n+1$ とする．$Q(w)$ は少くとも2つの零点をもつとする．$w(z)$ は (1.1) の有理形な解とすると，$\mu \uparrow +\infty$ のとき

(5.1) $\qquad w(z-\mu) \longrightarrow \lambda$

が広義一様に成り立つ．ここで λ は，$\lambda=\infty$ または $\lambda \in \Lambda$．

証明．$w_1, \cdots, w_l$ は $Q(w)$ の零点とする．

まず，(3.2) の Δ が空集合のときを考える．このとき，任意の α, β に対し定数 K があって，$w(z)$ は $H^*(\alpha, \beta, K)$ において正則でかつ $w_1, \cdots, w_l$ をとらない．したがって $\{w(z-\mu)\}$ は正規族となり，ある $\{\mu_m\}$ あって $w(z-\mu_m) \longrightarrow W(z)$ が広義一様に成り立つ．$W(z)$ は正則でかつ $w_1, \cdots, w_l$ をとらない．それゆえ $W(z)$ は定数で，明らかに (1.1) をみたすから，$W(z) \equiv \infty$ または $W(z) \equiv \lambda \in \Lambda$．しかし $w(z)$ の集積値集合は1点または連続体であるから，$\{w(z-\mu)\}_{\mu \geqq 0}$ 自身が，$\mu \uparrow \infty$ のとき，∞ または $\lambda \in \Lambda$ に収束する．

つぎに Δ が空でないとする．$y_0 \in \Delta$ をとると，補題3.3

と 3.4 とから，$L(y_0, K)$ 上に $z_1^{(t)}, \dots, z_{k_t}^{(t)}$，$t=0,1,\dots,l$ あって，$z_j^{(t)}=x_j^{(t)}+iy_0$ とかくとき，$K-n \leqq x_j^{(t)} \leqq K$，$t==0,1,\dots,l$ で，$z_1^{(0)}, \dots, z_{k_0}^{(0)}$ は補題 3.3 にいう極，$z_1^{(t)}, \dots, z_{k_t}^{(t)}$ は補題 3.4 にいう w_t 点 $(t=1,\dots,l)$ となる。$r>0$ を小さくとって $D(z_j^{(t)}, r)=\{|z-z_j^{(t)}| \leqq r\}$ が交わらないようにする．任意の α, β に対し K' あって，$w(z)$ は

(5.2) $H^*_{(r)}(\alpha, \beta, K') = H^*(\alpha, \beta, K') \setminus \bigcup_{j=1,\dots,k_t;\ t=0,\dots;\ m=0,1,\dots} D(z_j^{(t)}-m, r)$

したがって $\{w(z-\mu);\ \mu \geqq 0\}$ は $H^*_{(r)}(\alpha, \beta, K')$ において正規族となる．$\frac{1}{w(z-\mu)}$ をも考えれば，$\{w(z-\mu);\ \mu \geqq 0\}$ は $H^*(\alpha, \beta, K')$ で正規族で，それゆえ $\{\mu_m\}$，$\mu_m \uparrow \infty$，あって

$$w(z-\mu_m) \longrightarrow \overline{W}(z) \qquad (\text{広義一様}),$$

ここで $\overline{W}(z)$ は (1.1) の有理形解である．$\overline{W}(z)$ が定数でなければ，実数 c を，$\overline{W}(c) \neq \infty$，$P(\overline{W}(c)) \neq 0$，$Q(\overline{W}(c)) \neq 0$ ととることができる．c をこのようにとって固定する．

$a' \to \infty$ のとき $T(A, a, a', c;\ \overline{W}(z)) \longrightarrow \infty$ ならば (4.5) から

(5.3) $\qquad T(A, a, a', c;\ \overline{W}(z)) \geqq M g_2^{a'} \qquad (g_2 > 1).$

一方，補題 3.3 と 3.4 とから，$\overline{W}(z)$ の極と w_t-点とは $L(y_0, K_{y_0})$ $(y_0 \in \Delta)$ 上に一定の間隔で並ぶ．したがって $n(a';\ w_t, \overline{W}(z)) = O(a')$．それゆえ (4.2) から

$$T(A, a, a', c;\ \overline{W}(z)) \leqq 3K \sum_{t=0}^{2} \int_a^{a'} n(x+2+A;\ w_t, \overline{W}(z))\,dx + O(a'^2)$$

が，ある定数 K で成り立つ．($w_0=\infty$ とかいた)．よって

$$T(A,\ a,\ a',\ c\ ;\ W(z)) = O(a'^2)$$

となるが，これは (5.3) と矛盾する．したがって

(5.4) $\quad T(A,\ a,\ a',\ c\ ;\ W(z))$ は，$a' \to \infty$ のとき，有界．

よって

$$T(A,a,a',c\,;R(W(z))) = q_0 T(A,a,a',c\,;W(z)) + O(1) =$$
$$= T(A,a,a',c\,;\alpha_n W(z+n) + \cdots + \alpha_1 W(z+1)) \leqq$$
$$\leqq \sum_{k=1}^{n} T(A,a,a',c\,;\ W(z+k)) + O(1) \leqq$$
$$\leqq n(1+\varepsilon)\,T(A,\ a,\ a'+n,\ c\,;W(z)) + O(1).$$

ここで $\varepsilon > 0$ は，$n(1+\varepsilon) < q_0$ なように択んでおく．

$a' \to \infty$ とすると，(5.4) から

$$q_0 T(A,a,\infty,c\,;W(z)) \leqq n(1+\varepsilon)\,T(A,a,\infty,c\,;W(z)) + O(1).$$

したがって

(5.5) $\quad T(A,a,\infty,c\,;W(z)) \leqq M$

がある定数 M (A, a によらない) で成り立つ．よって

(5.6) $\quad N(A,a,\infty,c\,;w_t,W(z)) \leqq M, \qquad t=0,1,\cdots,l.$

$A \to \infty$ と

$$v(z\,;A,a,\infty,c) = \log\left|\frac{\sin\dfrac{i\pi(z-a)}{2A} + \sin\dfrac{i\pi(c-a)}{2A}}{\sin\dfrac{i\pi(z-a)}{2A} - \sin\dfrac{i\pi(c-a)}{2A}}\right|$$
$$\to \log\left|\frac{1+\dfrac{c-a}{z-a}}{1-\dfrac{c-a}{z-a}}\right|.$$

それゆえ (5.6) から，$W(z)$ の w_t-点は有限個しかなく，よって $W(z) \equiv$ 定数 (∞ または $\in \Lambda$)．

それゆえ，$w(z-\mu_m)$ が収束すれば，極限は ∞ かまたは Λ に属する定数である．$W(z)$ の集積値集合は1点または連続体であるから，$w(z-\mu)$ 自身が ∞ または $\lambda \in \Lambda$ に広義一様収束することがわかる．　Q.E.D.

REFERENCES

1. Goldberg & Ostrowskii: Value Distribution of Meromorphic Functions. Moskva 1970.
2. Harris & Sibuya: Symptotic solutions of systems of nonlinear difference equations. Arch. Rat. Mech. Anal. 15(1964),377-395.
3. " : General solutions of nonlinear difference equations. TAMS 115.
4. " : On asymptotic solutions of systems of nonlinear difference equations. J. Reine Angew. Math., 291(1977),92-117.
5. Kimura: On the iteration of analytic functions. FE 14(1971).
6. " : On meromorphic solutions of the difference equation $y(x+1)=y(x)+1+\lambda/y(x)$. Lecture Notes in Math. No.312(1973).
7. M. Tsuji: Potential Theory in Modern Function Theory. 1975.
8. Yanagihara: Meromorphic solutions of the difference equation $y(x+1)=y(x)+1+\lambda/y(x)$, I. FE 21(1978), 97-104.
9. " : Meromorphic solutions of some difference equations of higher order. Proc. Japan Acad., 58A (1982).
10. " : Meromorphic solutions of some difference equations of higher order, II. Proc. Japan Acad., 58A (1982).